Weihnachtstutorium

Notiztitel 17.12.2009

Asymptotisches Wachstum rekursiver Funktionen

Teile-und-Herrsche-Algorithmen

- Zerlege Problem in Teilprobleme und löse diese
- Oft: Problem d. Größe n in a Teilprobleme der Größe $\frac{n}{b}$ zerhackt

=> Mastertheorem

Laufzeit $T(n) = \underbrace{a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right)} + \underbrace{f(n)}$

rot: zusätzlicher Aufwand

blau: Laufzeit d. nächsten Rekursionsstufe

Fall 1: $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$

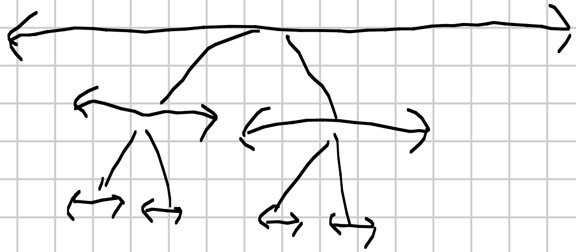
Fall 2: $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ $\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

Fall 3: $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0 \wedge$

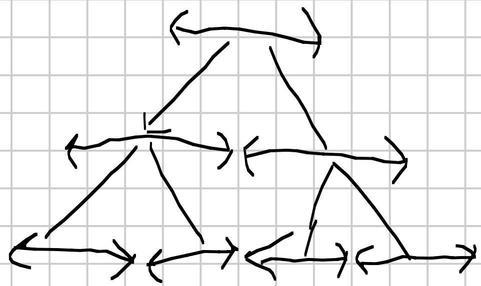
$\exists\, 0 < d < 1 : \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a f(\frac{n}{b}) \leq d f(n)$

$\Rightarrow T(n) \in \Theta(f(n))$

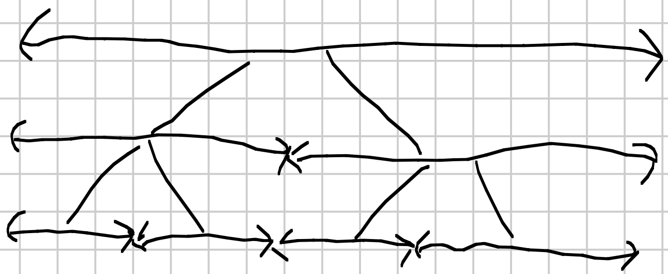
Fall 1:



Fall 3:



Fall 2:



Automaten

Mealy-Automaten

6-Tupel $M = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ mit

Z : Zustandsmenge

$z_0 \in Z$: Startzustand

X : Eingabealphabet

$f : Z \times X \rightarrow Z$: Zustandsübergangsfunktion

$g : Z \times X \rightarrow Y^*$: Ausgabefunktion

$f^*: Z \times X^* \to Z$ (letzter Zustand)

$f^*(z, \varepsilon) \to z$

$\forall w \in X^*: \forall x \in X: f^*(z, wx) = f(f^*(z, w), x)$

Alternativ: $\bar{f}^*(z, \varepsilon) = z$

$\forall w \in X^*: \forall x \in X: \bar{f}^*(z, xw) = \bar{f}^*(f(z, x), w)$

$f^{**}: Z \times X^* \to Z^*$ (Konkatenation aller durchlaufenden Zustände)

$f^{**}(z, \varepsilon) = z$

$\forall w \in X^*: \forall x \in X: f^{**}(z, wx) = f^{**}(z, w) \cdot f^*(z, wx)$

Alternativ:

$f^{**}(z, \varepsilon) = z$

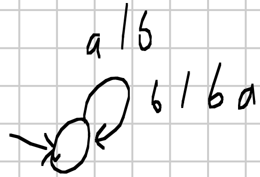
$\forall w \in X^*: \forall x \in X: f^{**}(z, xw) = z \cdot f^{**}(f(z, x), w)$

$g^*: Z \times X^* \to Y^*$ (letzte Ausgabe)

$g^{**}: Z \times X^* \to Y^*$ (alle Ausgaben konkatniert)

<u>Beispiel</u>

Automat: $Z = \{z\}$, $X = Y = \{a, b\}$, $g(z, a) = b$ $g(z, b) = ba$



- $w_1 = g^{**}(z, a) = b$
- $\forall i \in \mathbb{N}: w_{i+1} = g^{**}(z, w_i)$

$w_2 = ba$

$w_3 = bab$

$w_4 = babba$

$w_5 = babbabab$

$|w_1| = 1$

$|w_2| = 2$

$|w_3| = 3$

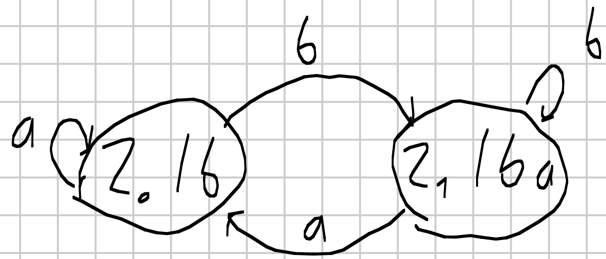
$|w_4| = 5$

$|w_5| = 8$

$\forall i \in \mathbb{N}_0: |w_{i+2}| = |w_i| + |w_{i+1}|$

Moore-Automaten

6-Tupel $M = (Z, z_0, X, f, Y, g)$ mit



Z : Zustandsmenge

$z_0 \in Z$: Startzustand

X : Eingabealphabet

$f : Z \times X \rightarrow Z$: Zustandsübergangsfunktion

$h : Z \rightarrow Y^*$: Ausgabefunktion

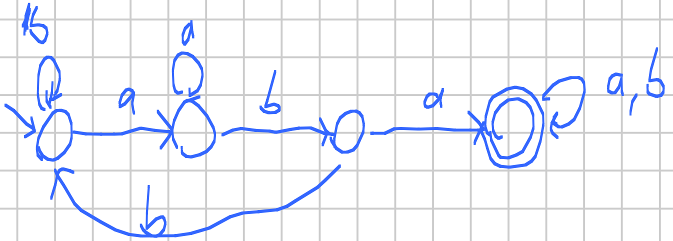
Akzeptoren

$Y = \{0, 1\}$

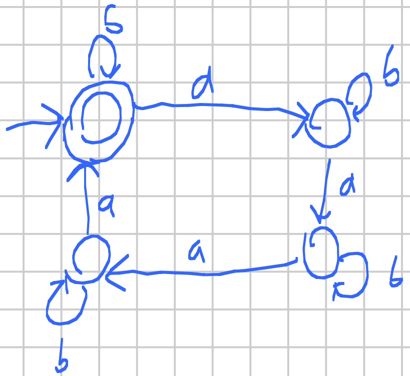
Beispiele

Akzeptoren für Sprache über $X = \{a,b\}$

1.) der Wörter, die das Teilwort aba enthalten.

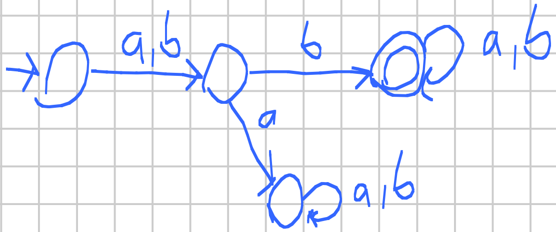


2.) der Wörter, deren Anzahl an a durch 4 teilbar ist



3) nirgends zwei b hintereinander

4) Zweite Zeichen ist ein b



5) Irgendwo zwei b hintereinander