Problemtutorium

Notiztitel 28.01.2010

Unentscheidbare Probleme

Gödelisierung

Übersetzung TM zu $\mathbb{N}$ [bijektiv]

Wir schreiben T_w für TM mit Gödelnummer w.

Universelle TM

Erhält als Eingabe w_1 und w_2 und simuliert T_{w_1} mit Eingabe w_2.

Halteproblem

$H = \{ w \in A^* \mid T_w(w) \text{ hält} \}$ ist unendscheidbar.

Beweis

Ann: $\exists\, T_h$, die H entscheidet.

Konstruiere T' mit Eingabe w wie folgt:

- Simuliere T_h
  - T_h gibt aus, dass $T'(w)$ hält $\Rightarrow$ gehe in Endlosschleife
  - T_h gibt aus, dass $T'(w)$ nicht hält $\Rightarrow$ halte

Sei w' die Gödelnummer von T'.

$T'(w')$ hält genau dann, wenn sie nicht hält ↯

$\Rightarrow T_h$ existiert nicht.

Oder:

- Es gibt so viele TMn wie Elemente in $\mathbb{N}$.
- Es gibt so viele Terminierungsaussagen über TM wie in $2^{\mathbb{N}} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\quad \left[|2^M| = 2^{|M|} \right]$
- Es gibt keine surj. Abb $f: \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ (*)

$\Rightarrow$ Es gibt Aussagen, die nicht durch GN dargestellt werden können

$\Rightarrow \nexists$ TM, die diese Aussage entscheidet.

Beweisskizze von (*):

Sei X eine Menge. Beh.: $\nexists$ surj. Abb. $f: X \to 2^X$

<u>Annahme</u> $\exists$ surj. Abb. $f: X \to 2^X$.

Definiere $X \supseteq Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$

f surj. $\Rightarrow \exists x_0 \in X: f(x_0) = Y$

1.) $x_0 \in Y \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} x_0 \in f(x_0) \Rightarrow x_0 \notin Y$ ↯

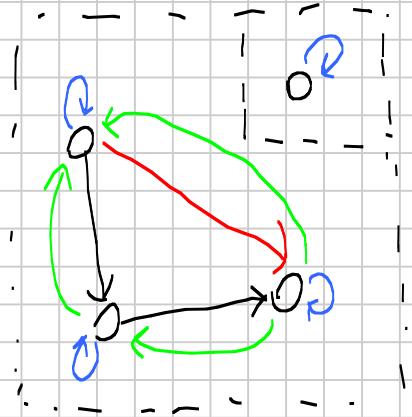
2.) $x_0 \in X \setminus Y \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} x_0 \in f(x_0) \Rightarrow x_0 \in Y$ ↯

$\Rightarrow$ x_0 weder in Y, noch in $X \setminus Y$ ↯

$\Rightarrow \nexists f$.

Äquivalenzrelationen

- reflexiv
- transitiv
- symmetrisch



Notation $\equiv$

Äquivalenzklasse

Sei M eine Menge, $x \in M$. $[x] := \{ y \in M \mid x \equiv y \}$ Äquivalenzklasse mit Repräsentant x.

Beispiele

- LA: Restklassen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, Faktorräume u.v.m.
- Nerode-Relation (später)

1.) Zeige $x \equiv y \Rightarrow [x] = [y]$

„$\subseteq$“

$$z \in [x] \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} x \equiv z \overset{\text{Sym}}{\Rightarrow} z \equiv x \overset{x \equiv y,\ \text{trans}}{\Rightarrow} z \equiv y \overset{\text{Sym}}{\Rightarrow} y \equiv z \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} z \in [y]$$

$$\Rightarrow [x] \subseteq [y]$$

„$\supseteq$“ analog...

$\square$

2.) Zeige $z \in [x] \wedge z \in [y] \Rightarrow [x] = [y]$

$$z \in [x] \wedge z \in [y] \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} x \equiv z \wedge y \equiv z \overset{\text{Sym}}{\Rightarrow} x \equiv z \wedge z \equiv y \overset{\text{Trans}}{\Rightarrow} x \equiv y \overset{1.)}{\Rightarrow} [x] = [y]$$

Nerode-Relation

Sei $L \subseteq A^*$.

$\forall w_1, w_2 \in A^*: w_1 \equiv_L w_2 \iff (\forall w \in A^*: w_1 w \in L \iff w_2 w \in L)$

Bsp:

$L = \langle (a|b)^* ab \rangle$

w_1	w_2	$w_1 \equiv_L w_2$	Warum?
ε	a	n	$w = b$
aa	ba	j	
ab	ab	j	reflexiv
ba	abb	n	$w = b$

$A^* = [a] \cup \underbrace{[bb]}_{[\varepsilon]} \cup [ab]$

endlich viele Ä-klassen — L rechtslinear

Bem: Sei A der Akzeptor mit $L(A) = L$ und $w_1, w_2 \in A^*$ nicht $\equiv_L$- äquivalent.

Frage: Was kann man über $f^*(z_0, w_1)$ und $f^*(z_0, w_2)$ sagen?

$$f^*(z_0, w_1) \neq f^*(z_0, w_2)$$

Kongruenzrelation

Verträglichkeit Sei M Menge

$\equiv$ verträglich mit $f: M \to M$ $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M: x_1 \equiv x_2 \Rightarrow f(x_1) \equiv f(x_2)$

$\equiv$ verträglich mit $\square$ (bin. Operation $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$:

$$x_1 \equiv x_2 \wedge y_1 \equiv y_2 \Rightarrow x_1 \square y_1 \equiv x_2 \square y_2$$

z.B.

Restklassen $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (mod 6 - Restklassen)

Fkt	verträglich
$f_1(x) = x+1$	Ja
$f_2(x) = 2x$	Ja
$f_3(x) = 0$	Ja
$f_4(x) = \lceil \frac{x}{2} \rceil$	Nein (z.B. $x_1 = 8$, $x_2 = 2$)