Letztes Tutorium

Notiztitel 11.02.2010

Stetige Abb. auf HO

$(D, \sqsubseteq)$ sei HO, $f: D \to D$ heißt stetig $:\Leftrightarrow$ für jede aufsteigende Kette

$x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq x_3 \ldots : f(\bigsqcup_i x_i) = \bigsqcup_i f(x_i)$

Bsp.:

$D = 2^{A^*}$, $\sqsubseteq \; = \; \subseteq$ (Mengeninklusion)

Sei $v \in A^*$: $f_v : D \to D$ mit $f(L) = \{v\} L$

Behauptung: f_v ist stetig

Beweis: Sei $L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \ldots$ eine Kette, $L := \bigcup_i L_i$ ihr Supremum

$f_v(L_i) = \{vw \mid w \in L_i\} \Rightarrow \bigcup_i f_v(L_i) = \{vw \mid \exists i \in \mathbb{N}_0 : w \in L_i\} = \{v\}\{w \mid \exists i \in \mathbb{N}_0 : w \in L_i\} = \{v\} \bigcup_i L_i = f(\bigcup_i L_i)$ $\square$

Totale Ordnungen

Def: $R \subseteq M \times M$ heißt totale Ordnung $:\Leftrightarrow$ R ist eine HO $\land \forall x,y \in M: xRy \lor yRx$

$\Rightarrow \nexists$ unvergleichbare Elemente

z.B.:

- $\sqsubseteq_1 \subseteq A^* \times A^*$ sei definiert durch

  Seien $w_1, w_2 \in A^*$, $v \in A^*$ sei das maximale Präfix $(\exists u_1, u_2 \in A^*: w_1 = v u_1 \land w_2 = v u_2)$

  - Fall 1: $v = w_1 \Rightarrow w_1 \sqsubseteq_1 w_2$
  - Fall 2: $v = w_2 \Rightarrow w_2 \sqsubseteq_1 w_1$
  - Fall 3: sonst $w_1 \sqsubseteq w_2 \Leftrightarrow w_1(|v|) \sqsubseteq_A w_2(|v|)$

- $\sqsubseteq_2 \subseteq A^* \times A^*$ sei definiert durch

  $w_1 \sqsubseteq_2 w_2 \Leftrightarrow |w_1| < |w_2| \lor (|w_1| = |w_2| \land w_1 \sqsubseteq_1 w_2)$

Bsp.:

w_1	w_2	$w_1 \sqsubseteq_1 w_2$	$w_1 \sqsubseteq_2 w_2$
aa	aabba	Ja ($v = aa$, 1. Fall)	Ja ($\lvert w_1 \rvert < \lvert w_2 \rvert$)
aa	bba	Ja ($v = \varepsilon$, 3. Fall)	— " —
aaaa	bba	— " —	Nein weil nicht
aaaab	aab	Ja($v = aa$, 3. Fall)	— " —

Aufgabenstellungen: Blatt 9 von gbi08.ira.uka.de - Lösungsskizzen

9.1

a) $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in \Theta(n^3)$

also: $f(n) = n^3$

b) Nach dem durchlauf der i-ten inneren Schleife:

$$p = \sum_{j=1}^{i^2} 2j-1 = 2\sum_{j=1}^{i^2}(j) - i^2 = \cancel{2}\,\frac{i^2(i^2+1)}{\cancel{2}} - i^2 = i^4 + i^2 - i^2 = i^4$$

Division durch i^3 ergibt: $i^4 + (i-1)$ div $i^3 = i$

Damit: mögliche Funktion: $g(n) = n$

9.2 Erinnerung: $f \in O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: f(n) \leq c \cdot g(n)$

a) $f \in O(n) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: f(n) \leq c n$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} f(k) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0} f(k)}_{:=a} + \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq a + \sum_{k=n_0+1}^{n} c \cdot k \leq a + \sum_{k=n_0+1}^{n} c \cdot n = a + (n-n_0) c \cdot n$$

$$\leqq a + n \cdot c \cdot n \leq \underbrace{(a+c)}_{\text{konstant}} n^2$$

$\Rightarrow$ Beh.

9.2

b) $\sum_{k=0}^{n} g(k) \in O(n^2)$: Es reicht zu zeigen: $\forall n \in \{2^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}: \sum_{k=0}^{2^i} g(k) = (2^i)^2$

I.A.: $\sum_{k=0}^{1} g(k) = 1 = (2^0)^2 = 1^2$ ✓

I.V.: Sei $i \in \mathbb{N}_0$ und gelte $\sum_{k=0}^{2^i} g(k) = (2^i)^2$

I.S.: Für $2^i < k < 2^{i+1}$: $g(k) = 0$

$$\sum_{k=0}^{2^{i+1}} g(k) = \sum_{k=0}^{2^i} g(k) + g(2^{i+1}) \overset{\text{I.V.}}{=} (2^i)^2 + g(2^{i+1}) \overset{\text{Def}}{=} 2^{2i} + \frac{3}{4}(2^{i+1})^2$$

$$= 2^{2i} + 3 \cdot 2^{2i+2-2} = (1+3)\,2^{2i} = 2^2 \cdot 2^{2i} = 2^{2i+2} = 2^{2(i+1)} = (2^{i+1})^2$$

9.2 b) (Fortsetzung)

$g(n) \notin O(n)$

Annahme: $g(n) \in O(n) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot n$

Sei n eine Zweierpotenz größer als n_0 und größer als $\frac{4}{3}c$. Dann

$$g(n) = \frac{3}{4} n^2 \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} c \cdot n = c \cdot n \quad \lightning$$

$$= \frac{3}{4} \underbrace{n}_{\geq \frac{4}{3}c} \cdot n$$